ROMÂNIA
MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE

Colegiul Naţional Militar „Alexandru Ioan Cuza”

Proiect didactic

Data:

Clasa: a XI-a

Unitatea de învățământ: Colegiul Național Militar “Alexandru Ioan Cuza”

Disciplina: Matematică- Algebră

Profesor: Sarău Maria

Unitatea de învățare*:* Sisteme de ecuații liniare

Titlul lectiei: Recapitulare sisteme de ecuații liniare

Tipul lecției: Lecție de recapitulare și sistematizare a cunoștințelor

Locul desfășurării lecției: sala de clasă

Timp alocat: 45 de minute

COMPETENȚE SPECIFICE VIZATE:

C1. Identificarea unor situaţii practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic;
C2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces;
C3. Rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme utilizând algoritmi specifici;

C4. Stabilirea unor condiţii de existenţă şi/sau compatibilitate a unor sisteme şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora;

OBIECTIVE OPERAȚIONALE:

La sfârșitul orei elevii vor fi capabili:

O_1 – Să scrie matricea atașată unui sistem de ecuații;

O_2 - Să calculeze determinantul unei matrice asociate sistemului;

O_3- Să utilizeze corect noţiunile de compatibilitate a sistemelor;

O_4- Să determine rangul unei matrice;

O_5 – Să calculeze soluția unui sistem de ecuații liniare.

STRATEGIA DIDACTICĂ:

- **METODE DIDACTICE:** rebus, conversația, explicația, exercițiul, metoda R.A.I., Jocul Didactic, Turul Galeriei;
- **MIJLOACE DE ÎNVĂȚĂMÂNT:** fișe de lucru, fișa de temă, foi de flipchart, minge, diplomă, markere, barem de notare;
- **FORME DE ORGANIZARE:** frontală, individulă, grupe;
- **METODE ȘI INSTRUMENTE DE EVALUARE:** observarea sistematică a elevilor, chestionarea orală, notarea, aprecierea verbală.

BIBLIOGRAFIE:

- Programa şcoalară pentru disciplina Matematică- Anexa nr.2 la ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 3252/ 13.02.2006;
- Mircea Ganga – Matematică - Manual pentru clasa a XI-a (TC+CD), Editura Mathpress, 2006;
- M. Burtea, G. Burtea, Matematică- Exerciții și probleme, Editura Carminis, Pitești, 2018;
- C. P. Nicolescu, M. G. Nicolescu, Matematică, sinteze de teorie, exemple rezolvate, exerciții și probleme, Clasa a XI-a, Editura și Tipografia ICAR, București;
- https://didactic.ro/ .

Anexe:

Fișa de lucru în echipă

Barem de notare

Fișa de temă

SCENARIUL DIDACTIC

Etapele lecției	*Timp*	*Ob. op.*	*Desfășurarea lecției*	*Strategia didactică*			*Metode de evaluare*
				Metode didactice	*Mijloace de învățământ*	*Forme de organizare*	
1. Moment organizatoric	1 min.		Se asigură un climat propice bunei desfăşurări a lecţiei (se notează absenţele, se pregătesc cele necesare lecţiei). Elevii se pregătesc pentru lecție.	Conversația		Frontală	
2.Recapitulare și sistematizare a cunoștințelor	4 min. 1 min. 10 min.		Profesorul verifică frontal temele scrise făcând eventuale observaţii. Dacă sunt nelămuriri, solicit unui elev care a rezolvat corect să refacă exercițiul la tablă. Elevii îşi verifică tema şi corectează eventualele greşeli. Profesorul informează elevii asupra obiectivelor principale ale lecției : "În cadrul orei de astăzi vom recapitula cunoştinţele referitoare la sisteme de ecuaţii liniare". Vor fi reactualizate cunoștințele anterioare referitoare la sisteme de ecuații liniare cu ajutorul metodei R.A.I(răspunde-aruncă-întreabă). În cazul în care jocul durează mai mult de 10-12 minute, profesorul informează elevii că au fost verificate majoritatea noțiunilor referitoare la sisteme de ecuații	Explicația Exercițiul Conversația Metoda R.A.I.	 Minge	Frontală Individuală Frontală Frontală	Aprecierea verbală Observarea sistematică a elevilor, aprecierile

	14 min. 10		liniare şi că e timpul să se treacă la rezolvarea problemelor. Elevii sunt împărțiți în 5 echipe de câte 4-5 elevi formate anterior, astfel încât elevii mai puțin performanți să poată fi ajutați de către cei cu potențial matematic. Reprezentantul fiecărei grupe a extras anterior lecției, dintr-un bol un număr pentru a fixa numărul grupei. Profesorul dă sarcini clare, fiecare membru al echipei va avea câte un exercițiu de rezolvat. Fiecare grupă va primi câte o fișă de lucru, o foaie de flipchart și markere. Fișa de lucru conține exerciții și probleme care se rezolvă folosind noțiunile învățate în capitolul anterior, și anume: **Sisteme de ecuații liniare**. Dirijați de către profesor, elevii vor lucra pe grupe, parcurgând toți pașii în vederea rezolvării sarcinilor de lucru trasate. După rezolvarea problemelor, fiecare grupă va preda foaia de flipchart, altei echipe pentru notare. Grupa 1 predă grupei 2, grupa 2 predă grupei 3, grupa 3 predă grupei 4, grupa 4 predă grupei 5, iar grupa 5 predă				verbale, Chestionarea orală

	min. 2min.		grupei 1. Grupele vor primi de la profesor baremul de evaluare, cu punctaje explicite, astfel grupele vor corecta, vor nota echipele vecine și vor expune pe tablă fișa corectată. Reprezentantul grupei va ieși la tablă și va explica punctajele atribuite. Pe rând, cele patru grupe vor efectua un tur al galeriei, pentru a observa mai bine lucrările celorlalți colegi și punctajele obținute. Vor urma discuții în grup , fiecare grupă putând adresa celorlalte grupe întrebări. Profesorul va fi moderator de discuții, intervenind cu completări sau remarci atunci când este cazul. Echipa care are cel mai mare punctaj și a terminat cel mai repede este declarată echipă câștigătoare, iar membrii echipei primesc câte o diplomă. Rezolvarea exercițiilor din fișa de lucru: 1. Să se rezolve cu ajutorul regulii lui Cramer sistemul: $\begin{cases} 4x+y+z=9 \\ x-y+2z=5. \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ Rezolvare:	Conversația	Foi de flipchart Fișa de lucu Markere		

		O_1 O_2 O_3 O_5	$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}, \det A = 4+2+2+1-16+1=-6\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. $\Delta x=\begin{vmatrix}9 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=9+10+4+2-36+5=-6 \Rightarrow x=1$ $\Delta y=\begin{vmatrix}4 & 9 & 1\\ 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-20+2+18-5-16+9=-12, y=2.$ $\Delta z=\begin{vmatrix}4 & 1 & 9\\ 1 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-8+18+5+9-40-2=-18, z=3$ $S=\{(1,\ 2,\ 3)\}.$	Conversația Explicația Exercițiul	Foi de flipchart	Grupe	
		O_4	2. Să se calculeze rangul matricei $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 9 & 1\end{pmatrix}.$ Rezolvare: $\det A=-3+0-2+0+9-4=0 \Rightarrow$rang A<3 $d_2=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3-4=-7\neq 0 \Rightarrow$rang A=2. 3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}2x-2y+z-3t=-7\\ x+y+2z-5t=-6\\ -x-2y-z+5t=2\end{cases}.$	Conversația Explicația Exercițiul Jocul didactic	Foi de flip-chart Fişa de lucru	Grupe	

		O_1 O_2 O_3 O_4 O_5	Rezolvare: $$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 2 & -5\\ -1 & -2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$ $d_3=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-2-2+4+1+8-2=$ $7\neq 0\Rightarrow$rang A=3 Nu există determinanți caracteristici$\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat x,y,z necunoscute principale $t=\alpha\in\mathbb{R}$ necunoscută secundară $$\begin{cases}2x-2y+z=-7+3\alpha\\ x+y+2z=-6+5\alpha\\ -x-2y-z=2-5\alpha\end{cases}$$ $\det A=d_3=7\neq 0\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. $\Delta x=\begin{vmatrix}-7+3\alpha & -2 & 1\\ -6+5\alpha & 1 & 2\\ 2-5\alpha & -2 & -1\end{vmatrix}=14\alpha-7\Rightarrow$ $x=2\alpha-1$ $\Delta y=\begin{vmatrix}2 & -7+3\alpha & 1\\ 1 & -6+5\alpha & 2\\ -1 & 2-5\alpha & -1\end{vmatrix}=7+7\alpha, y=\alpha+1$				Chestionarea orală Observarea sistematică a elevilor

		           O_1 O_2 O_3	$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -7+3\alpha \\ 1 & 1 & -6+5\alpha \\ -1 & -2 & 2-5\alpha \end{vmatrix} =-21+7\alpha, z=-3+\alpha$ $S = \{(2\alpha-1, \alpha+1, -3+\alpha, \alpha)\}$. 4. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ 3x+y+az=1 \end{cases}$ să fie compatibil unic-determinat. Rezolvare: *det A*$\neq 0$, unde $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ *det A*$= (a-1)(a^2+a-4) \neq 0 \Rightarrow a-1 \neq 0$ *și* $a^2+a-4 \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. 5. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+az=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. a) Pentru $a=9$, calculați determinantul matricei atașate sistemului. b) Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0 = 11(x_0+y_0+z_0)$. Rezolvare:				

		O_1 O_2 O_3 O_4 O_5	a)Pentru $a = 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 6 - 2 - 18 + 8 + 9 - 3 = 0$. b) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$, sistemul admite soluție unică. Cum sistemul este omogen și compatibil determinat, acesta admite doar soluția banală $(0, 0, 0)$. Astfel, x_0, y_0 și z_0 nu sunt numere reale nenule. Pentru $a = 9$, sistemul este compatibil nedeterminat. $rang\ A = 2$, necunoscute principale x, y. Necunoscută secundară $z = \alpha \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} x + y = -2\alpha \\ x + 2y = -9\alpha \end{cases}$. De aici, $y = -7\alpha, x = 5\alpha$. $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0) \Leftrightarrow -5\alpha - 7\alpha + \alpha = 11(5\alpha - 7\alpha + \alpha) \Leftrightarrow -11\alpha = -11\alpha$ egalitate adevărată.	Turul Galeriei Conversația		Frontal Grupe Diplome	Observarea sistematică a elevilor, aprecierile verbale, Chestionarea orală Evaluarea intervențiilor din cadrul discuțiilor de grup
3. Concluzii și realizarea feedback-ului	2 min.		Se fac aprecieri asupra activităţii elevilor, recomandări, subliniind aspectele pozitive şi încurajând elevii care şi-au adus aportul la lecţie. Vor fi evaluate răspunsurile elevilor, iar elevii care s-au				Notarea Aprecierea verbală

			remarcat vor fi notați în catalogul profesorului. De asemenea, profesorul va pune întrebari legate de lecție, dacă elevii o consideră interesantă. Elevii răspund la întrebări.				
4.Tema pentru acasă	1 min.		Profesorul împarte fișa de temă pentru acasă dând explicațiile necesare pentru rezolvarea acesteia.	Explicația	Fișa de temă		

FIȘA DE LUCRU ÎN ECHIPĂ

1. Să se rezolve cu ajutorul regulii lui Cramer sistemul: $\begin{cases} 4x + y + z = 9 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$.
2. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - 2y + z - 3t = -7 \\ x + y + 2z - 5t = -6 \\ -x - 2y - z + 5t = 2 \end{cases}$.
4. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases}$ să fie compatibil unic- determinat.
5. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

   a) Pentru $a = 9$, calculați determinantul matricei atașate sistemului.

   b) Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

BAREM DE NOTARE

1.	$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $\det A=4+2+2+1-16+1=-6\neq 0\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. $\Delta x=\begin{vmatrix}9&1&1\\5&-1&2\\2&2&-1\end{vmatrix}=9+10+4+2-36+5=-6\Rightarrow x=1$ $\Delta y=\begin{vmatrix}4&9&1\\1&5&2\\1&2&-1\end{vmatrix}=-20+2+18-5-16+9=-12,\ y=2.$ $\Delta z=\begin{vmatrix}4&1&9\\1&-1&5\\1&2&2\end{vmatrix}=-8+18+5+9-40-2=-18,\ z=3$ $S=\{(1,\ 2,\ 3)\}$.	0, 5p 0,5p 0,5p 0,5p
2.	$det\,A=-3+0-2+0+9-4=0\Rightarrow$rang A<3 $d_2=\begin{vmatrix}-1&2\\2&3\end{vmatrix}=-3-4=-7\neq 0\Rightarrow$rang A=2.	0,5p 0,5p
3.	$A=\begin{pmatrix}2&-2&1&-3\\1&1&2&-5\\-1&-2&-1&5\end{pmatrix}$ $d_3=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&1&2\\-1&-2&-1\end{vmatrix}=-2-2+4+1+8-2=7\neq 0\Rightarrow$rang A=3 Nu există determinanți caracteristici$\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat x, y, z necunoscute principale	0,5p 0,3p

	$t=\alpha\in\mathbb{R}$ necunoscută secundară $$\begin{cases}2x-2y+z=-7+3\alpha\\ x+y+2z=-6+5\alpha\\ -x-2y-z=2-5\alpha\end{cases}$$ $\det A=d_3=7\neq 0\Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. $\Delta x=\begin{vmatrix}-7+3\alpha & -2 & 1\\ -6+5\alpha & 1 & 2\\ 2-5\alpha & -2 & -1\end{vmatrix}=14\alpha-7\Rightarrow x=2\alpha-1$ $\Delta y=\begin{vmatrix}2 & -7+3\alpha & 1\\ 1 & -6+5\alpha & 2\\ -1 & 2-5\alpha & -1\end{vmatrix}=7+7\alpha, y=\alpha+1$ $\Delta z=\begin{vmatrix}2 & -2 & -7+3\alpha\\ 1 & 1 & -6+5\alpha\\ -1 & -2 & 2-5\alpha\end{vmatrix}=-21+7\alpha, z=-3+\alpha$ $S=\{(2\alpha-1, \alpha+1, -3+\alpha, \alpha)\}$.	0,3p 0,3p 0,3p 0,3p 0,3p 0,1p
4.	$det\ A\neq 0$, unde $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 3 & 1 & a\end{pmatrix}$ $det\ A=(a-1)(a^2+a-4)\neq 0\Rightarrow a-1\neq 0$ *și* $a^2+a-4\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\left\{1, \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.	0,5p 0,8p
5.	a)Pentru $a=9$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 9\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $\det A=6-2-18+8+9-3=0$. b) $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$, sistemul admite soluție unică. Cum sistemul este omogen și compatibil determinat, acesta admite doar soluția banală $(0, 0, 0)$. Astfel, x_0, y_0 și z_0 nu sunt numere reale nenule.	0,5p

	Pentru $a = 9$, sistemul este compatibil nedeterminat. $rang\ A = 2$, necunoscute principale x, y. Necunoscută secundară $z = \alpha \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} x + y = -2\alpha \\ x + 2y = -9\alpha \end{cases}$. De aici, $y = -7\alpha, x = 5\alpha$. $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0) \Leftrightarrow -5\alpha - 7\alpha + \alpha = 11(5\alpha - 7\alpha + \alpha) \Leftrightarrow -11\alpha = -11\alpha$ egalitate adevărată.	0,5p 0,3p 0,5p 0,5p

Fișă de temă

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

   a)Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ sistemul are soluție unică ?

   b) Să se rezolve sistemul în cazul $a = -2$.

   c)Arătați că dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$ sistemul are soluții întregi.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + az = b \end{cases}$, unde a şi b sunt parametri reali.

   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

   b) Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

   c) Să se arate că există o infinitate de valori ale numerelor a şi b pentru care sistemul admite o soluţie (x ,y ,z), cu x, y, z în progresie aritmetică.

3. Fie A matricea coeficienţilor sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze det A .

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$. astfel încât sistemul să admită soluţii nenule.

c) Să se arate că, dacă $m = 0$, atunci expresia $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluţie nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.